Método Axiomático e Teorias Formais

#15

Princípio de Padoa

Axiomatização da Mecânica de Partículas

Definição 1. $\mathfrak{B} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ é um sistema de mecânica de partículas (SMP) se, e somente se, para cada $p, q \in P$ e $t \in T$, os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. O conjunto P é finito e não vazio.
2. O conjunto T é um intervalo de números reais.
3. s_p é duas vezes diferenciável em T.
4. $m(p) > 0$.
5. $f(p, q, t) = -f(q, p, t)$.
6. $s(p, t) \times f(p, q, t) = -s(q, t) \times f(q, p, t)$.
7. $m(p) \cdot \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t)$.

Independência de Termos Primitivos

Algo parecido com a independência de axiomas pode ser investigado em relação aos termos primitivos de uma teoria formal, no sentido de verificar se alguns termos podem ser definidos ou não em função de outros.

Existe um princípio, formulado pelo lógico italiano Alessandro Padoa no ano de 1900, que permite fazer essa verificação. Tal princípio está registrado na definição a seguir.

Alessandro Padoa (1868-1937)

Independência de Termos Primitivos

Definição 1 (Princípio de Padoa) – Um termo primitivo c de uma teoria formal T é independente dos demais termos primitivos se existem dois modelos de T tais que c possui diferentes significados nesses dois modelos enquanto que os demais termos primitivos permanecem com o mesmo significado.

Lembrando que um *modelo* de uma teoria formal é uma interpretação na qual todos os axiomas dessa teoria são verdadeiros.

Independência do termo “massa” em um SMP

A critério de exemplificação, verifiquemos, por meio do Princípio de Padoa, que o termo primitivo “massa” é independente dos demais termos primitivos de SMP (ou seja, não pode ser obtido em função do demais termos primitivos, por isso, não pode ser eliminado da teoria).

Conforme a definição anterior, temos que exibir dois modelos para um SMP nos quais o termo primitivo “massa” possui significados diferentes enquanto que os demais termos permanecem com os mesmos significados.

Independência do termo “massa” em um SMP

Metateorema 1. O termo primitivo “massa” é um conceito independente dos demais conceitos de um SMP.

Demonstração:
Primeiramente, vale relembrar que um SMP possui os seguintes termos primitivos: P, T, s, m, f, g.
Seja I_1 a seguinte interpretação:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.
- $T = \mathbb{R}$.
- $s(p_i, t) = (c_i, 0, 0)$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
- $m(p_i) = 1$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
- $f(p_i, p_j, t) = (0, 0, 0)$, para $i = 1,\ 2, 3, 4$.
- $g(p_i, t) = (0, 0, 0)$, para $i = 1,\ 2, 3, 4$.

Independência do termo “massa” em um SMP

Metateorema 1. O termo primitivo “massa” é um conceito independente dos demais conceitos de um SMP.

Demonstração:
Primeiramente, vale relembrar que um SMP possui os seguintes termos primitivos: P, T, s, m, f, g.
Seja I_2 a seguinte interpretação:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.
- $T = \mathbb{R}$.
- $s(p_i, t) = (c_i, 0, 0)$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
- $m(p_i) = 2$, para $i = 1, 2, 3, 4$.
- $f(p_i, p_j, t) = (0, 0, 0)$, para $i = 1, \ 2, 3, 4$.
- $g(p_i, t) = (0, 0, 0)$, para $i = 1, \ 2, 3, 4$.

Pelo Princípio de Padoa, “massa” é um termo independente dos demais termos primitivos de um SMP, portanto, não eliminável. ■

Definabilidade do termo P de um SMP

Metateorema 2. O termo primitivo P não é um conceito independente dos demais termos primitivos de um SMP.

Demonstração:

Suponha por absurdo que P é um termo independente.
Então, existem dois modelos M_1 e M_2 de um SMP nos quais os termos T, s, m, f e g possuem o mesmo significado mas P possui significados diferentes nos dois modelos.
Mas isso é uma contradição, pois, sendo P "parte" do domínio de s, m, f, g, sua mudança de significado também alteraria o significado destes últimos termos.
Logo, P não é independente dos demais termos primitivos de um SMP. ■

Sendo P um termo não independente, isso significa que podemos obtê-lo a partir dos demais termos.
Portanto, não existiria a necessidade de tomar P como um conceito primitivo da teoria.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br